

Agronomická
fakulta

27.11.2013, Brno

Připravil: Tomáš Vítěz

Petr Trávníček

Mechanika tekutin

Úvod do předmětu

Mendelova
univerzita
v Brně



Mechanika tekutin

Zabývá se podmínkami rovnováhy

kapalin a plynu v klidu,
zákonitostmi pohybu kapalin a plynu,
pohybu těles ponořených do kapalin a plynu.

Dělení

Hydrostatika a aerostatika

Hydrodynamika a aerodynamika

Vlastnosti kapalin a plynů

Souhrnný název – **tekutiny**

Společné vlastnosti

- tekutost (viskozita)
- nemají stálý tvar

Rozdílné vlastnosti

Kapaliny

- ▮ mají stálý objem
- ▮ v klidu vytvářejí vodorovnou volnou hladinu
- ▮ jsou málo stlačitelné

Plyny

- ▮ nemají stálý objem
- ▮ nevytvářejí volný vodorovný povrch
- ▮ jsou dobře stlačitelné

Vlastnosti kapalin a plynů

Odlišují se různou tekutostí

Ideální kapalina

- kapalina bez vnitřního tření, dokonale nestlačitelná

Ideální plyn

- plyn bez vnitřního tření, dokonale stlačitelný

Základní pojmy

1. Hustota kapalin: ρ je hmotnost objemové jednotky kapaliny

$$\rho = \frac{m}{V} [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$$

Pro běžnou praxi se uvažuje $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ (dosaženo při 3,8 °C, 101 325 Pa)

2. Stlačitelnost: κ udává o kolik se zmenší objemová jednotka kapaliny v závislosti na zvětšení tlaku o $dp = 1 \text{ Pa}$

$$\kappa = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{dV}{dp} [\text{m}^2 \cdot \text{N}^{-1}]$$

Základní pojmy

Převrácená hodnota stlačitelnosti – **Modul objemové pružnosti K**

$$K = \frac{1}{\kappa} = -V_0 \frac{dp}{dV} [\text{Pa}]$$

Modul závisí na teplotě, obsahu rozpuštěných solí a plynů, pro vodu:

$$0^\circ\text{C} \quad K = 1,87 - 2,01 \text{ GPa}$$

$$20^\circ\text{C} \quad K = 2 - 2,24 \text{ GPa}$$

3. Tepelná roztažnost: udává změnu objemu kapaliny vlivem teploty

$$V = V_0 (1 + \beta \cdot t) [\text{m}^3]$$

β .. součinitel teplotní objemové roztažnosti (voda .. $0,18 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$)

t .. teplota ve $^\circ\text{C}$

Základní pojmy

Zcela elementární příklad:

Cisternový vagón je až po otvor naplněný naftou. ($\rho = 940 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$) Při teplotě 0°C se do vagónu vejde 50 000 kg nafty. Jak se změní množství nafty, které vyteče otvorem z vagónu, když se cestou teplota nafty zvýší na 20°C ?

$$\rho = \frac{m_0}{V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{m_0}{\rho} = \frac{50000}{940} = 53,19 \text{ m}^3$$

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$$

$$V = 53,19 \cdot (1 + 1 \cdot 10^{-3} \cdot 20) = 1,0638 \text{ m}^3$$

Základní pojmy

4. Viskozita: Ve skutečné kapalině vznikají tangenciální síly mezi sousedními částicemi, které se pohybují různými rychlostmi. Tangenciální třecí síly vztažené na jednotku plochy dávají tangenciální napětí τ .

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \Rightarrow \eta = \frac{dy}{dv} \cdot \tau \left[\text{Pa} \cdot \text{s}^{-1} \right] \left[\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2} \right]$$

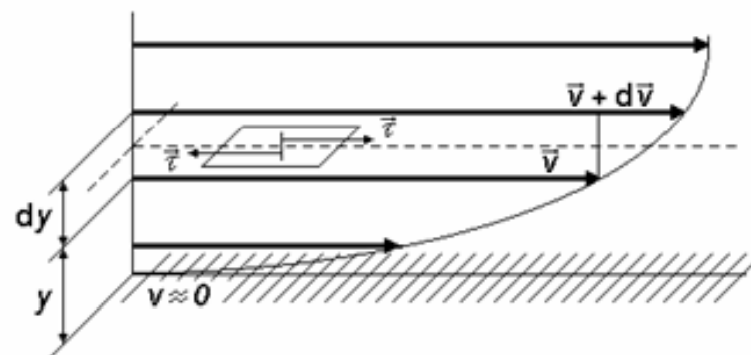
↙
gradient rychlosti

τ .. tečné napětí

η .. součinitel dynamické viskozity

v .. rychlost

y .. délka normály (kolmo na směr proudu)



Základní pojmy

V praxi se používá **kinematická viskozita** ν .

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \right]$$

Kinematická viskozita pro vodu v $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$:

0°C $1,78 \cdot 10^{-6}$

10°C $1,31 \cdot 10^{-6}$

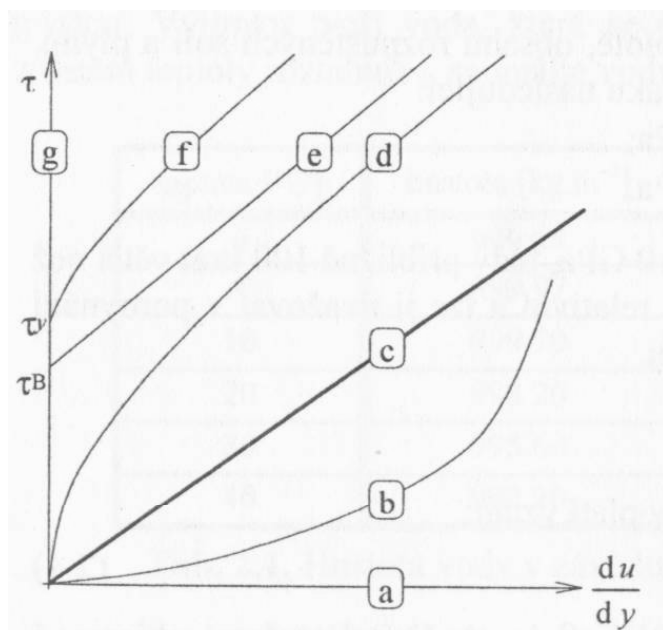
20°C $1,01 \cdot 10^{-6}$

30°C $0,81 \cdot 10^{-6}$

Základní pojmy

Newtonovská kapalina: platí lineární závislost mezi tangenciálním napětím a gradientem rychlosti

Nenewtonovská kapalina: vztah mezi tangenciálním napětím a gradientem rychlosti není lineární (dán tzv. reologickými modely)



a) Ideální kapalina

c) Newtonovská kapalina

d-g) Nenewtonovská kapalina

Tokové čáry časově nezávislých kapalin
 a) ideální kapalina, b) houstnoucí kapalina, c) newtonovská kapalina, d) řidnoucí kapalina, e) binghamská kapalina, f) nebinghamská kapalina, g) tuhé těleso

Základní pojmy

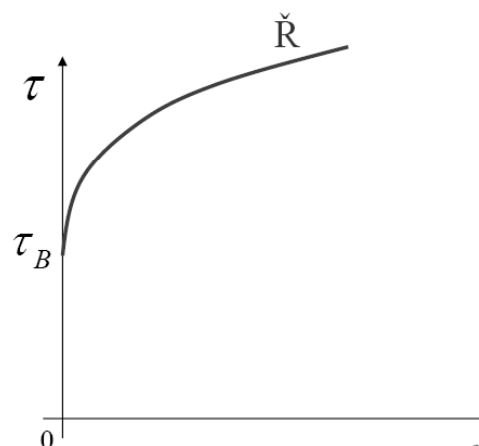
Nonnewtonovské kapaliny se rozdělují na několik skupin, pro čištění odpadních vod jsou významné **Binghamské kapaliny** (takto se chovají čistírenské kaly), platí zde Bulkley – Herschelův model:

$$\tau = \tau_y + K \left(\frac{du}{dy} \right)^n$$

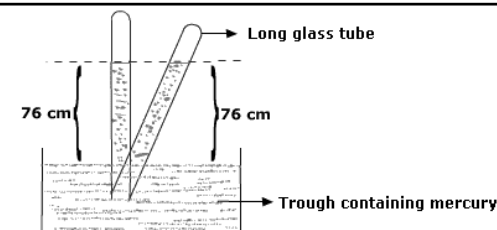
K ... koeficient konzistence

n ... tokový index

τ_y ... počáteční napětí



Hydrostatika



nauka o rovnováze kapalin v klidu (nepůsobí žádné tangenciální napětí)

1. Tlak:

Tlak p je definován poměrem normálové síly F a elementární plošky S

$$p = \frac{dF}{dS} [\text{Pa}]$$

2. Hydrostatický tlak:

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h [\text{Pa}]$$

3. Celkový tlak: p_c je součtem vnějšího a hydrostatického:

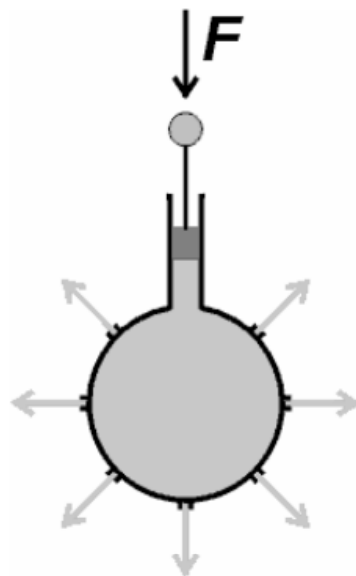
$$p_c = p_b + p_h$$

Hydrostatika



Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Pascalův zákon: Působí-li na kapalinu vnější tlak pouze v jednom směru, šíří se tlak uvnitř kapaliny do každého místa a v každém směru



Hydrostatika

Zcela elementární příklad:

Jaký je celkový tlak v hloubce 12 m pod hladinou moře, je-li průměrná hustota mořské vody 1028 kg.m^{-3} a vnější tlak odpovídá 740 mm rtuťového sloupce (hustota rtuti je $13\,550 \text{ kg.m}^{-3}$) ?????

a) $p_b = h_{\text{HG}} \cdot \rho_{\text{HG}} \cdot g_{\text{HG}} = 0,740 \cdot 13\,550 \cdot 9,81 = 98,4 \text{ kPa}$

b) $p_h = h \cdot \rho \cdot g = 12 \cdot 1028 \cdot 9,81 = 121 \text{ kPa}$

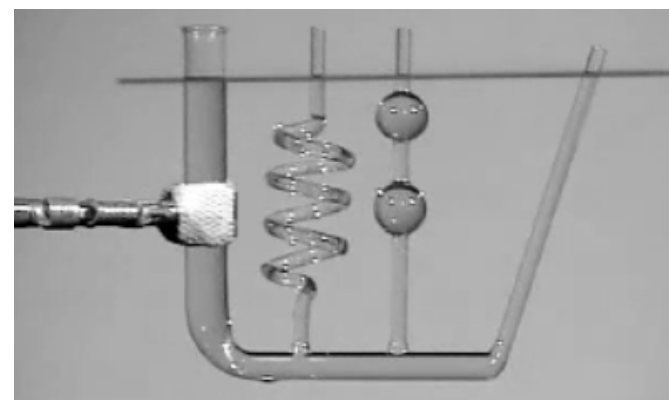
c) $p_c = p_b + p_h = 98,4 + 121 = 219,4 \text{ kPa}$

Hydrostatika

2. Tlaková síla kapalin:

a) Tlak působící na rovinnou plochu

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot S \text{ [N]}$$



Hydrostatická tlaková síla působená pouze tíhou kapaliny se rovná tíze sloupce kapaliny se základnou rovnající se tlakové ploše a s výškou rovnající se hloubce tlačené plochy pod hladinou.

Další zcela elementární příklad:

Vypočtete hydrostatickou tlakovou sílu působící na obdélníkový otvor (1,2x2,4 m) na vodorovném dně nádrže, je-li hloubka vody 12 metrů.

$$F = 1000 \cdot 9,81 \cdot (1,2 \cdot 2,4) = 339 \text{ kN}$$

Princip Archimédovy vztlakové síly

síla je výslednicí hydrostatických tlaků (sil) působících na plochu povrchu ponořeného tělesa.

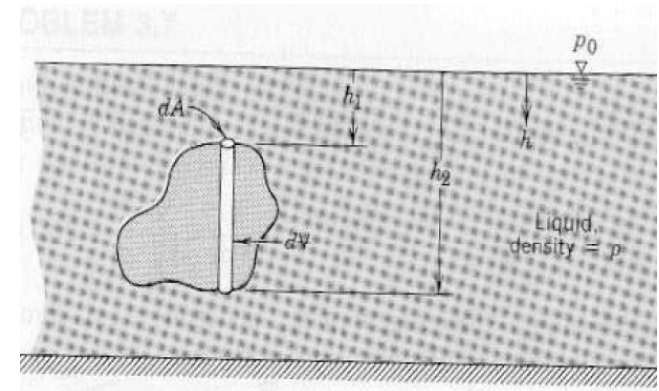
Horní podstava válce: $F_{horní} = (p_0 + h_1 \cdot \rho_f \cdot g) \cdot dA$

Hydrostatická síla působí dolů

Dolní podstava válce: $F_{dolní} = -(p_0 + h_2 \cdot \rho_f \cdot g) \cdot dA$

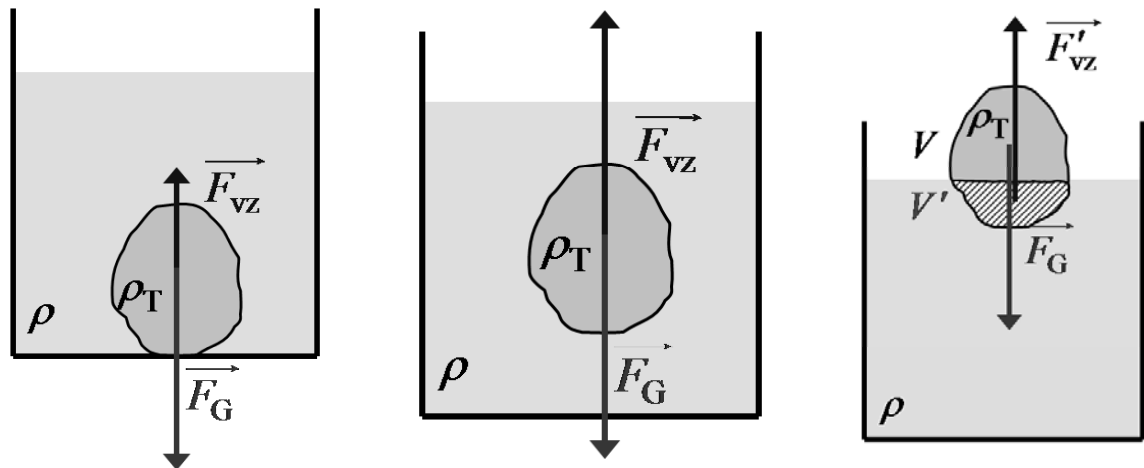
Hydrostatická síla působí nahoru

Výsledná vztlaková síla: $F_{dolní} + F_{horní} = \rho_f \cdot g \cdot (h_1 - h_2) \cdot dA = \rho_f \cdot g \cdot V_{válce}$



Plování těles

1. - těleso klesá ke dnu, výslednice míří dolů
2. - těleso se v kapalině vznáší, výslednice je nulová
3. - těleso plove na volné hladině kapaliny, výslednice míří nahoru



Hydrostatika

b) Tlak působící na šikmou rovinnou plochu

Hydrostatická tlaková síla působící na šikmou rovinnou plochu se rovná součinu této plochy a hydrostatického tlaku v jejím těžišti:

$$F = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S \text{ [N]}$$

Působíště této síly je dáno vztahem:

$$y_c = \frac{J_x}{U_x} = \frac{J_x}{S \cdot y_t} = y_t + \frac{J_t}{S \cdot y_t} \text{ [m]}$$

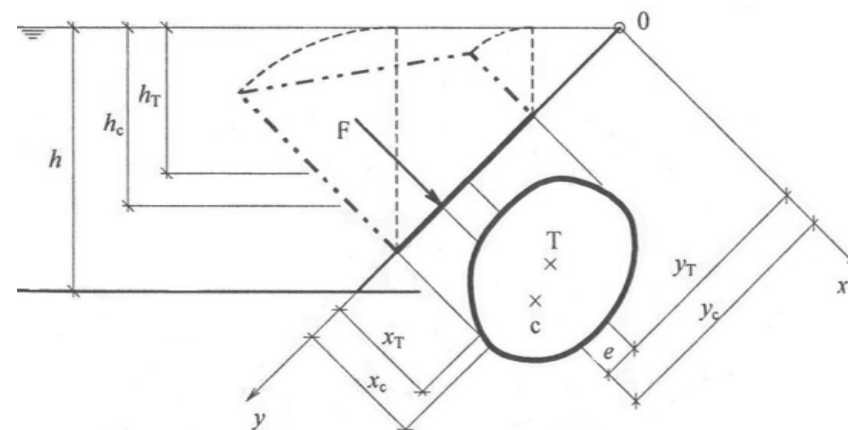
$$x_c = \frac{D_{xy}}{U_x} = \frac{D_{xy}}{S \cdot y_t} \text{ [m]}$$

J_x .. moment setrvačnosti plochy S k ose x

J_t .. moment setrvačnosti plochy S k těžištní ose x' rovnoběžnou s osou x

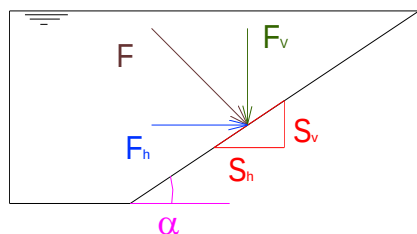
D_{xy} .. deviační moment plochy S k osám x,y

U_x .. statický moment plochy S k ose y



Hydrostatika

Výpočet pomocí horizontální a vertikální složky tlakové síly



Výsledná tlaková síla F:

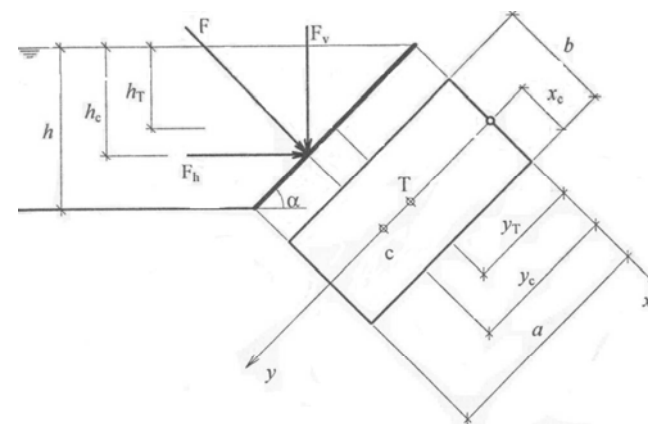
$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} \text{ [N]}$$

F_h .. Horizontální složka

$$F_h = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S \cdot \sin \alpha \text{ [N]}$$

F_v .. Vertikální složka

$$F_v = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S \cdot \cos \alpha \text{ [N]}$$



Př.3 - jen velmi mírně obtížnější:

Vypočtete velikost tlakové síly, která působí na šikmou obdélníkovou stěnu šířky 1 m, která je odkloněna od vodorovné o úhel 60° , je-li hloubka 7m.

Řešení

a) těžiště: $h_t = \frac{h}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ m}$

b) plocha stěny: $a = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin 60^\circ} = 8,083 \text{ m}$ $S = a \cdot b = 8,083 \cdot 1 = 8,083$

c) hydrostatická tlaková síla:

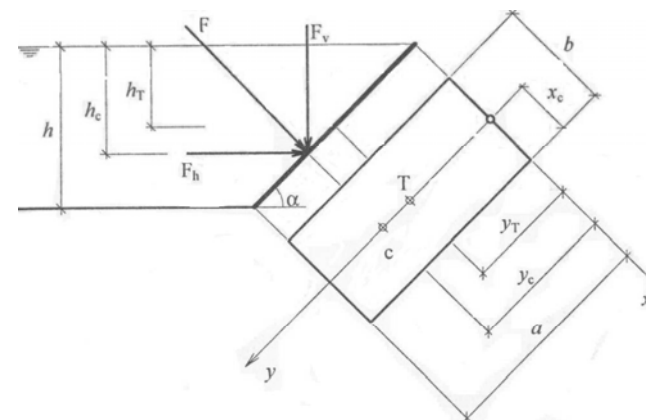
$$F_v = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S \cdot \cos \alpha = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3,5 \cdot 8,083 \cdot \cos 60^\circ = 240,348 \text{ kN}$$

$$F_h = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S \cdot \sin \alpha = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3,5 \cdot 8,083 \cdot \sin 60^\circ = 138,765 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_v^2 + F_h^2} = \sqrt{240,348^2 + 138,765^2} = 277,530 \text{ kN}$$

d) působíště (ve svislé zatěžované ose – y)

$$y_c = y_t + \frac{J_t}{S \cdot y_t} = \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{12}b \cdot a^3}{a \cdot b \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}a = 5,389 \text{ m}$$



Hydrostatika

c) Tlak působící na zakřivenou stěnu

Výsledná síla se určí z jednotlivých složek F_x , F_y , F_z

$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_{t,x} \cdot S_{yz} \quad [\text{N}]$$

$$F_y = \rho \cdot g \cdot h_{t,y} \cdot S_{xz} \quad [\text{N}]$$

$$F_z = F_{tl} - F_{vz} \quad [\text{N}]$$

F_{tl} .. vertikální tlaková složka, $F_{tl} = \rho \cdot g \cdot V \quad [\text{N}]$

V .. objem sloupce kapaliny nad plochou S pod hladinou

F_{vz} .. vertikální vztlaková síla, $F_{vz} = \rho \cdot g \cdot W \quad [\text{N}]$

W .. vztlakový objem

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad [\text{N}]$$

Hydrodynamika

Proudění tekutiny je pohyb tekutiny v jednom směru.

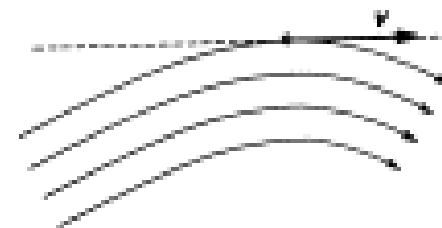
Proudění z hlediska časového průběhu může být:

1. **stacionární (ustálené)** - proudění, při němž se v daném místě tekutiny nemění její rychlost v závislosti na čase
2. **nestacionární** - prouděním, u něhož se v daném místě tekutiny rychlost v závislosti na čase mění

Pohyb částic tekutiny se popisuje pomocí proudnic:

Proudnice je taková myšlená čára, že tečna sestrojená v jejím libovolném bodě určuje směr rychlosti pohybující se částice tekutiny.

Každým bodem kapaliny prochází právě jedna proudnice, proudnice se neprotínají.



Hydrodynamika

zabývá se pohybem kapaliny a jejím působením na tuhá tělesa při jejich vzájemném relativním pohybu

Průtočný profil: rovinný řez vedením proudu, kolmý k jeho podélné ose a charakterizující jeho tvar, který kapalina zaujímá.



Hydrodynamika

Průtočný průřez S: plošný obsah řezu proudu plochou v každém bodě k vektoru střední bodové rychlosti

- otevřený – proudění o volné hladině (řeka)
- uzavřený – tlakové proudění (potrubí)



Bodová rychlost $u(x,y,z)$: dráha ℓ , kterou částice urazí za jednotku času t .

$$u = \frac{d\ell}{dt} \left[\text{m.s}^{-1} \right]$$

Hydrodynamika

Střední bodová rychlost: v dlouhém časovém intervalu vyrovnaná hodnota bodové rychlosti.

Průřezová (střední profilová) rychlost:

její vynásobení průtočným profilem dává skutečný průtok:

$$Q = v \cdot S \quad [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

Proudění:

- **ustálené:** rychlost není funkcí času – $Q = \text{konst.}$

Platí rovnice kontinuity (spojitosti)

$$Q = v_1 S_1 + v_2 S_2 + \dots + v_n S_n = \text{konst.}$$

- **neustálené:** rychlost v daném bodě je funkcí času

Hydrodynamika

Rovnice kontinuity

Při ustáleném proudění ideální kapaliny je součin obsahu průřezu S a rychlosti proudu v v každém místě trubice stejný.

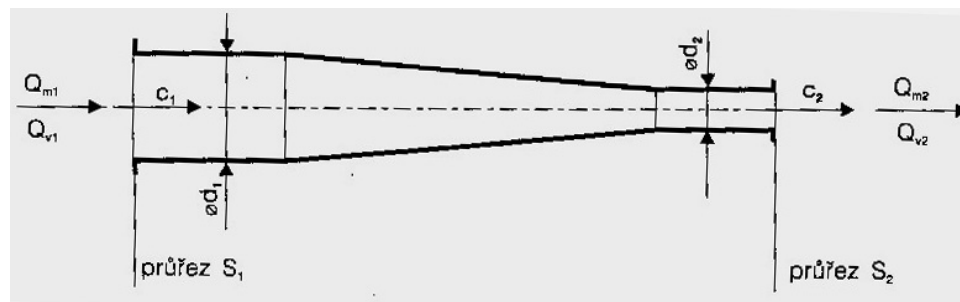
$$Q_{m1} = Q_{m2} \quad [\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$S_1 \cdot v_1 \cdot \rho = S_2 \cdot v_2 \cdot \rho$$

$$Q_{v1} = Q_{v2} \quad [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

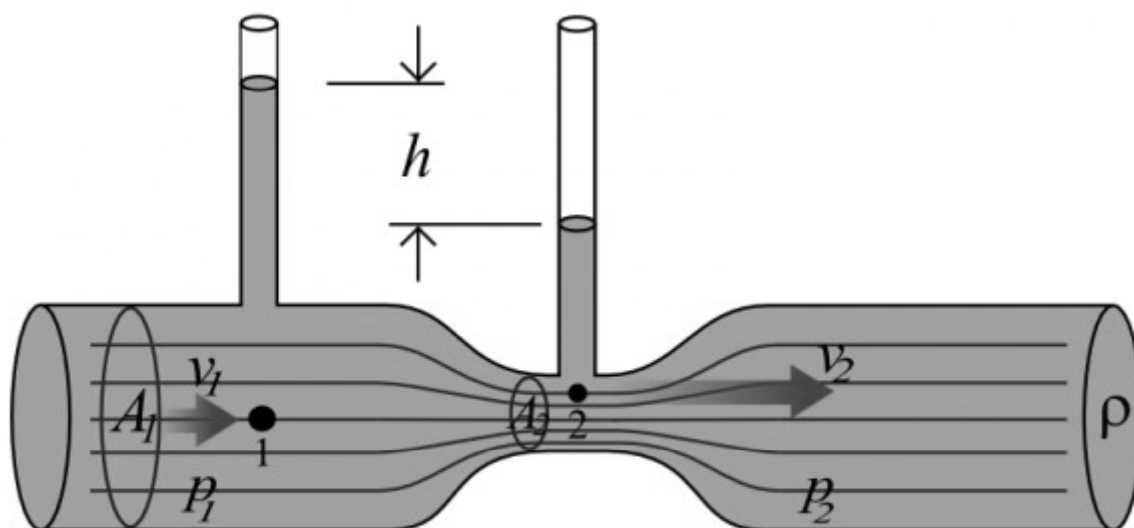
$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

zákon zachování hmoty



Hydrodynamika

Rovnice kontinuity:



Hydrodynamika

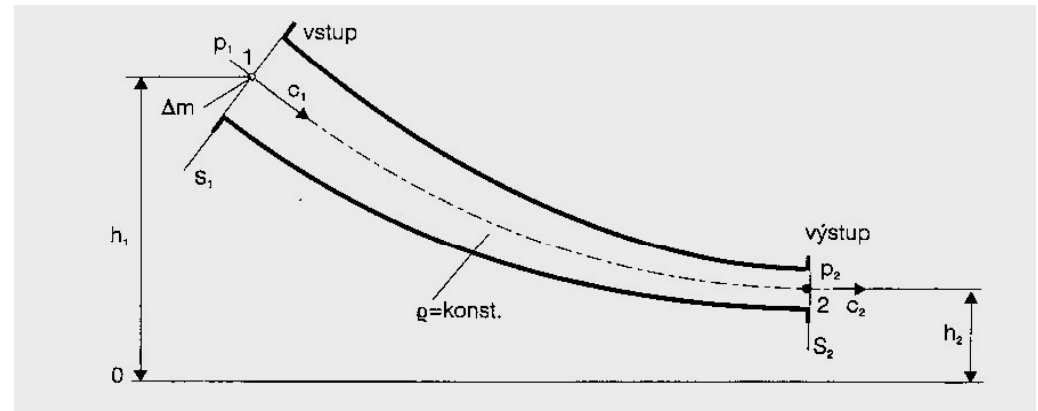
Bernoulliho rovnice

Za ustáleného pohybu ideální kapaliny je součet polohové, tlakové i pohybové energie stálý pro všechny průřezy.

$$E_{p1} = \Delta m \cdot g \cdot h_1$$

$$E_{tl1} = \Delta V \cdot p_1 = \frac{\Delta m}{\rho} \cdot p_1$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2$$



Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

$$E_{p1} + E_{tl1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{tl2} + E_{k2} = \text{konst.}$$

zákon zachování energie

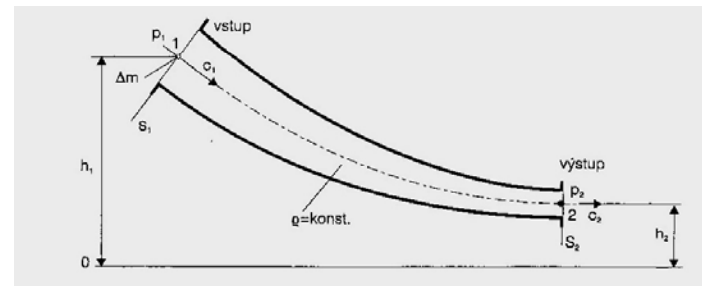
Hydrodynamika



Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

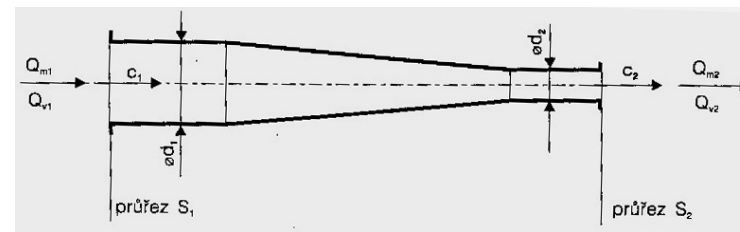
Po úpravě

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$



Pro vodorovné potrubí

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$



Hydrodynamika

Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu

$$E = h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha \cdot v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha \cdot v_2^2}{2g} + Z$$

Z ... Dochází k vnitřnímu tření a tření o stěny – část mechanické energie se mění převážně na energii tepelnou – z hydraulického hlediska ztráta.

v ... Pro skutečný profil se bodová rychlost nahradí rychlostí průřezovou

α ... Nerovnoměrné rozdělení rychlosti v profilu se zohlední Coriolisovým číslem.

Hodnota α

- pro koryta a kanály = 1,02 až 1,45

- pro potrubí = 1,04 až 1,1

$$\alpha = \frac{\int u^3 dS}{v^3 \cdot S}$$

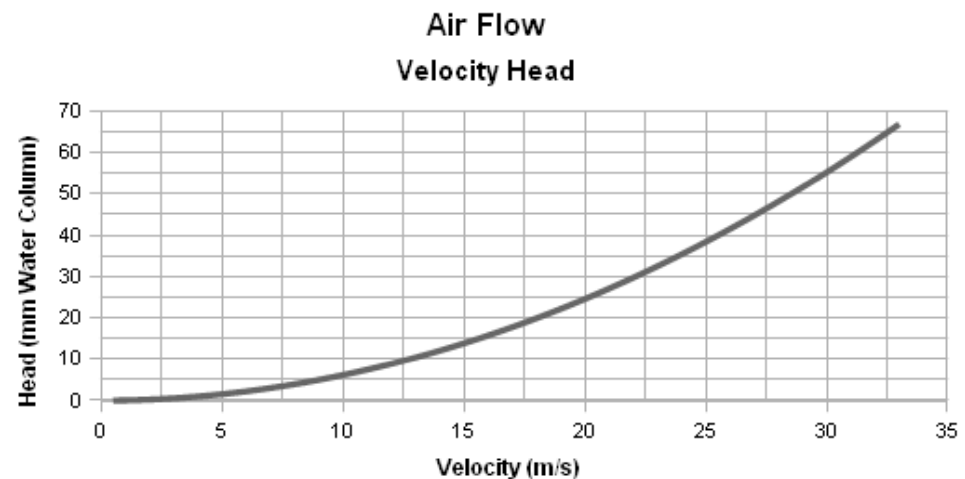
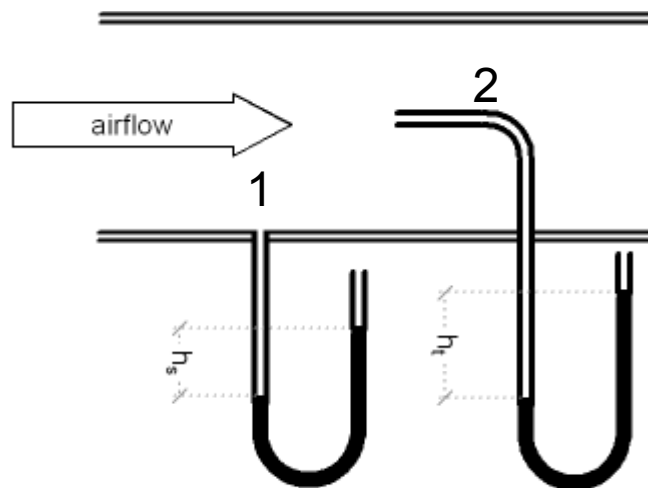
Užití Bernoulliho rovnice

Pittotova trubice

Pomocí Pitotovy trubice se určuje rychlost proudící tekutiny pomocí rozdílu tlaků.

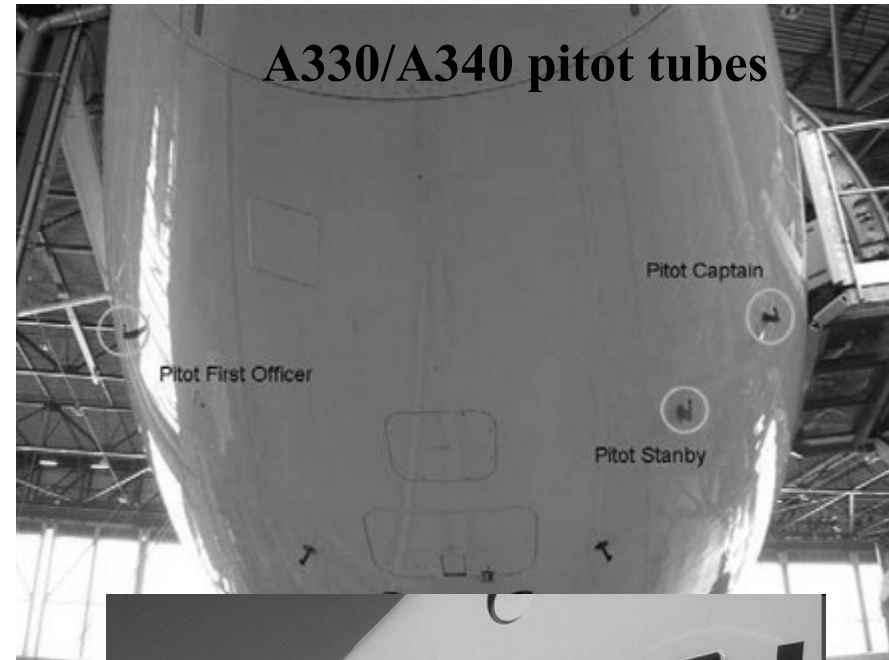
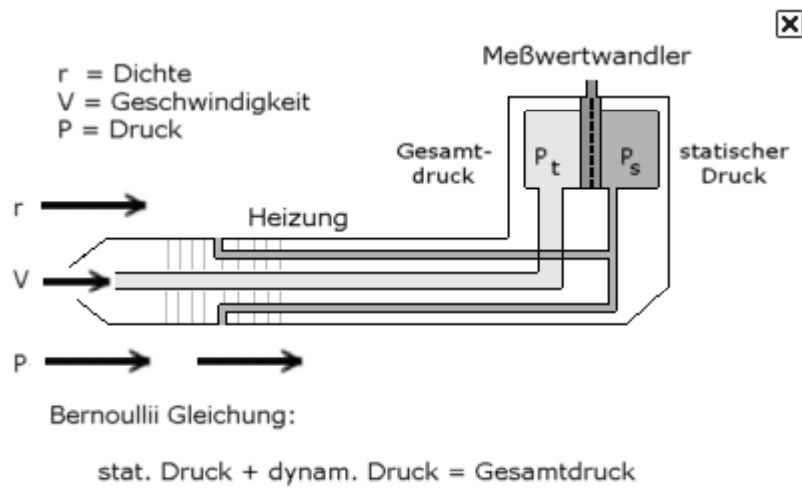
Tekutina v ohnutém vývodu (2) ztratí veškerou svou rychlost, zatímco u rovného vývodu (1) má tekutina stále svou rychlost. Svou energii si uchová, proto bude platit:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$$



Užití Bernoulliho rovnice

Pittotova trubice

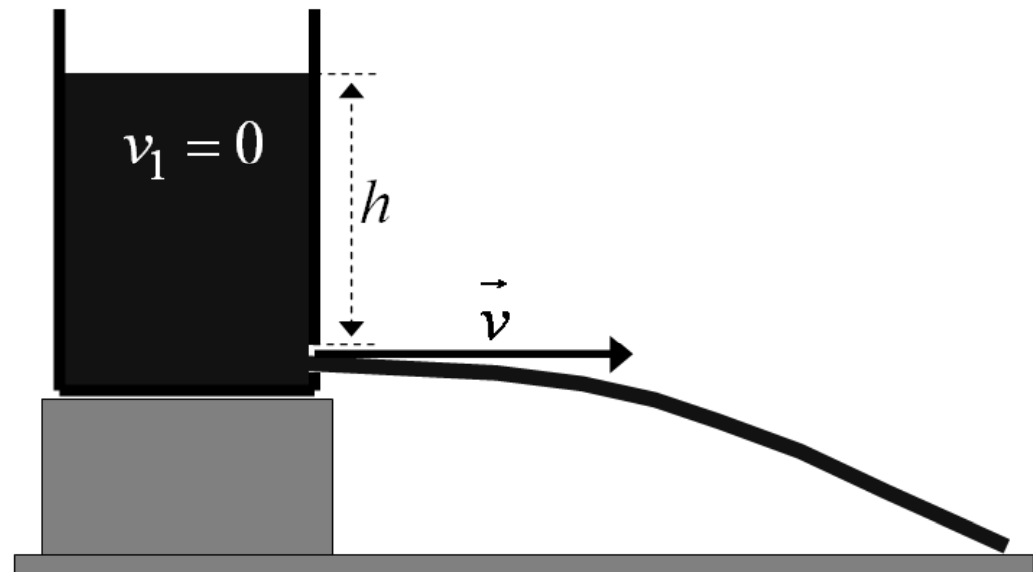


Užití Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 0^2 + h \cdot \rho \cdot g + p_a = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_a$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



Užití Bernoulliho rovnice

Ve vodorovné trubici proudí voda rychlostí 3 m/s, v daném místě je tlak $p_1 = 0,1$ MPa. Určete rychlost proudění v místě o tlaku 0,09 MPa

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_2$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 - p_2 \right)}$$

Bernoulliho princip

Děkuji za pozornost